超準解析入門

hei

2010.08.10

目次

1 フィルター

まず、超積の定義のため、フィルターを定義し基本的なことを証明しておく。
また、超フィルター以降でわかることだが、選択公理は必要である。

1.1 フィルター

Def 1.1.1(フィルター)
I：集合、$\emptyset \neq \mathscr{F} \subset \mathscr{P}(I)$ とする。
$\mathscr{F}$ が次の３条件を満たす時、$\mathscr{F}$ を I 上の**フィルター**(*filter*) という。
a) $\emptyset \notin \mathscr{F}$
b) $A \in \mathscr{F},\ A \subset B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$
c) $A,\ B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathscr{F}$

Def 1.1.2(フレッシェ・フィルター)
無限集合 I 上の**フレッシェ・フィルター**(*Fréchet filter*)$\mathscr{F}_o \subset \mathscr{P}(I)$ とは、

$$\mathscr{F}_o \overset{\text{def}}{=} \{B \subset I | B^c \text{は有限集合}\}$$

Prop 1.1.3
フレッシェ・フィルターはフィルター。
proof 容易なので、略。■

以下、何も言わなければ I は集合とする。

Def 1.1.4(有限交差的)
$\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(I)$ が**有限交差的**(または有限交差性をもつ) とは、

$$\text{任意の } \{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathscr{E} \text{ に対して、} \bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$$

Def 1.1.5(フィルター基底)
$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(I)$ が**フィルター基底**(*filter basis*) とは、
a)$\emptyset \notin \mathscr{B}$
b)$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow \exists C \in \mathscr{B} s.t. C \subset A \cap B$

Prop 1.1.6
1)$\mathscr{B}$ がフィルター基底のとき、$\mathscr{B}$ を含む (フィルターは存在し、そのうち) 最小のフィルター $\mathscr{F}$ が存在する。さらに $\mathscr{F}$ は次で与えられる。

$$\mathscr{F} = \{A \subset I | \exists B \in \mathscr{B} s.t. B \subset A\}$$

これを、フィルター基底 $\mathscr{B}$ の生成するフィルターという。
2)$\mathscr{E}$ が有限交差的なとき、$\mathscr{B}(\mathscr{E}) \overset{\text{def}}{=} \{A_1 \cap \cdots \cap A_n | A_1, \ldots A_n \in \mathscr{E}\}$ はフィルター基底。このとき、$\mathscr{B}(\mathscr{E})$ の生成するフィルターを $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ と書いて、(E) の生成するフィルターと呼ぶ。
proof 容易なので略 ■

1.2　超フィルター

Def 1.2.1(超フィルター)
I上のフィルター $\mathscr{F}$ が包含関係について極大なフィルターであるとき、
$\mathscr{F}$ を I 上の**超フィルター** (*ultrafilter*) という。

Def 1.2.2(単項超フィルターと非単項超フィルター)
$a \in$Iを含むIの部分集合全体は超フィルターであり、これを**単項超フィルター** (*principal ultrafilter*) という。単項でないフィルターを**非単項超フィルター** (*non-principal ultrafilter*) という。

次の定理は超フィルターの存在を保証する基本的な定理である。

Thm 1.2.3
$\mathscr{E}(\subset \mathscr{P}(\mathscr{I}))$ は有限交差的ならば、$\mathscr{E}$ を含む超フィルターが存在する。
特に、任意のフィルターに対し、それを含む超フィルターが存在する。

proof Zorn の補題による。$\mathscr{E}$ を含むフィルター全体を F とする。F は包含関係について帰納的半順序集合。よって、極大元が存在する。これは超フィルター。 ■

Prop 1.2.4
I 上のフィルター $\mathscr{F}$ について以下は同値。

a)$\mathscr{F}$ は超フィルター
b)Iの任意の部分集合 A について、$A \in \mathscr{F}$or I$\backslash A \in \mathscr{F}$
c)$A, B \subset$I,$A \cup B \in \mathscr{F}$ ならば、$A \in \mathscr{F} or B \in \mathscr{F}$
d)$A_1, \ldots, A_n \subset$I,$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{F}$ なら、$\exists j \in \{1, \ldots, n\} s.t.\ A_j \in \mathscr{F}$

proof $c) \Rightarrow b)$,c)$\Leftrightarrow$d) は良い。
$a) \Rightarrow b) : A \notin \mathscr{F}$ とする。$A' := I \backslash A$ に対し、$\mathscr{B} := \{V \cap A' | V \in \mathscr{F}\}$ はフィルター基。$\mathscr{B}$ の生成するフィルター G を取れば、$\forall V \in \mathscr{F}$ に対し、$V \cap A' \in \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. よって、$V \in \mathscr{G}$ より、$\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$
b)$\Rightarrow a)$: もし、$\mathscr{F}$ が超フィルターでないなら、あるフィルター $\mathscr{G}$ であって、$\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$.よって、$\exists A \in \mathscr{G}\ s.t.\ A \notin \mathscr{F}$.仮定から、$I \backslash A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ であるから、$\emptyset \in \mathscr{G}$ となって、矛盾。 ■

Prop 1.2.5 I は無限集合とする。このとき、I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ について、以下は同値。

a)$\mathscr{F}$ は単項でない
b)$\mathscr{F}$ は有限集合を含まない
c)$\mathscr{F}$ はフレッシェ・フィルター $\mathscr{F}_o$(I) を含む

proof
$a) \Rightarrow b)$: 対偶を示す。$\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathscr{F}$ ならば、前命題によって、$\exists \{a_j\} \in \mathscr{F}$.よって、$\mathscr{F}$ は超フィルターだから、単項。
$b) \Rightarrow c)$: 対偶を示す。$\exists A \in I\ s.t.\ A$ は有限集合かつ $A^c \notin \mathscr{F}$.再び前命題から $A \in \mathscr{F}$.よって、有限集合を含む。

$c) \Rightarrow a)$: 対偶を示す。$\mathscr{F}$ が単項ならば、$\{a\} \in \mathscr{F}$ なる $a \in I$ が存在する。このとき、$\mathscr{F}$ はフィルターだから、$I \backslash \{a\}$ を含まず、フレッシェ・フィルターを含まない。 ■

1.3 ω－imcomplete な超フィルター